المحاضرة الحادية عشرة

تتمة أمثلة المحاضرة السابقة:

4. $\gamma_4(t) = e^{it} : 0 \le t \le 3\pi$

الحل: نلاحظ أنّ $\gamma_4(0) = e^{i0} = 1 \, , \gamma_4(3\pi) = e^{i3\pi} = -1$

سيمسح $\gamma_4(t)$ دائرة الواحدة مرة واحدة، ومن ثم يعود ليمسح النصف العلوي "أي أنّه سيمسح دورة ونصف الدورة " على دائرة الواحدة. وهو ليس منحنيا مغلقا لأنّ صورة البداية لا تنطبق على صورة النهاية.

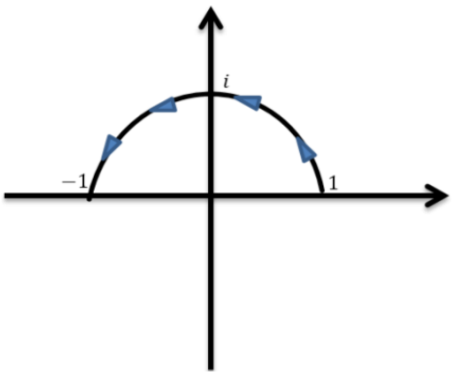
5. $\gamma_5(t) = -t + i\sqrt{1-t^2} \, : \, -1 \le t \le 1$

الحل: لدينا $x = -t$ ، $y = \sqrt{1-t^2}$، ونلاحظ أنّ $x^2 + y^2 = t^2 + (1-t^2) = 1$

وهذا يبيّن أنّ حامل المنحني المُمَثل بالتابع $\gamma_5(t)$ هو دائرة الواحدة ولما كانت $y \ge 0$ "الجذر الرئيسي لعدد حقيقي" فإنّ نقاط المنحني واقعة على النصف العلوي من هذه الدائرة.

أمّا بالنسبة لـ x، عندما تمسح t المجال $[-1,1]$ من -1 إلى 1، فإنّ x تمسح المجال $[-1,1]$ من 1 إلى -1.

الخلاصة: المنحني الناتج هو نصف دائرة الواحدة العلوي والممسوح من $z = 1$ إلى $z = -1$ كما هو موضح بالشكل:



المنحني البسيط:

نقول عن منحنٍ Γ إنّه بسيط إذا لم يمر من أي نقطة من نقاطه أكثر من مرة واحدة.

يمكن أن نُسمّي المنحني المغلق منحنيا بسيطا إذا كانت جميع نقاطه بسيطة باستثناء نقطة البداية والنهاية، فإنّها حتماً ستكون مضاعفة من المرتبة الثانية.

ويكافئ كلامنا السابق أنّ المنحني البسيط ممثل بتمثيل وسيطي $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ متباين على المجال $[a,b]$ إذا كان منحنياً مفتوحاً، ومتباين على المجال $[a,b[$ أو $]a,b]$ إذا كان منحنياً مغلقاً.

تعريف: نقول عن منحنٍ Γ إنّه من الصف C^1 إذا كان أحد تمثيلاته الوسيطية ينتمي إلى الصف C^1 "أي أنّه قابل للاشتقاق مرة واحدة ومشتقه مستمر على منطلقه".

مثال:

إنّ المنحني $C^+(a,r)$ ، حيث a ثابت عقدي و r ثابت حقيقي موجب تماماً، من الصف C^1.

الإثبات:

لدينا $\gamma(t) = a + re^{it}$ تمثيلاً وسيطياً لـ $C^+(a,r)$، حيث $0 \le t \le 2\pi$.

إنّ γ قابل للاشتقاق على $[0,2\pi]$، ومشتقه $\gamma'(t) = ire^{it}$ مستمر وذلك لأجل أي t من المجال $[0,2\pi]$، وبالتالي فإنّ المنحني الممثل بالتابع γ هو منحنٍ من الصف C^1.

مثال:

ليكن $\gamma(t) = t + it^2$، عندئذٍ $x = t, y = t^2$، وبالتالي $y = x^2$ وهي معادلة قطع مكافئ ذروته المبدأ ومحوره المحرقي هو محور التراتيب. أي أن حامل أي منحن ممثل بـ γ هو القطع السابق. وما يعين المنحني هو المجال المعرف عليهγ.

مثال: أثبت أنّ أي قطعة مستقيمة موجهة هي منحنٍ عقدي من الصف C^1.

لتكن z_1, z_2 بداية ونهاية القطعة المستقيمة على الترتيب، إن التابع γ المعرف على المجال $[0,1]$ بالمساواة :

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$$

هو تمثيل وسيطي للقطعة المستقيمة $[z_1 z_2]$ الممسوحة من z_1 إلى z_2. وإنّ γ قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$، كما أن مشتق هذا التابع هو تابع ثابت إذ يقرن كل عدد حقيقي من المجال $[0,1]$ بالعدد العقدي الثابت $z_2 - z_1$ ، فهو تابع مستمر على المجال $[0,1]$، وهذا يعني أنّ γ من الصف C^1، بالنتيجة $[z_1 z_2]$ منحنٍ من الصف C^1.

ملاحظة: إنّ كل قطعة مستقيمة موجهة هي منحنٍ بسيط.

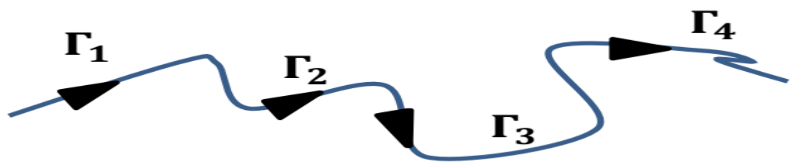
تعريف: نقول عن منحنٍ إنّه من الصف C^1 قطعياً إذا كان مؤلفاً من عدد منتهٍ من القطع (المنحنيات) المتتالية والتي كل منها منحنٍ من الصف C^1.

ملاحظة: إذا كانت متتالية من المنحنيات $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ تشكل المنحني Γ، فإنّنا نرمز لذلك بالشكل:

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$$

ولا نقصد بذلك جمعاً للمنحنيات، وإنّما مجرد ترمز.

مثلاً:



وبالتالي يمكن أن نكتب هنا:

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4$$

وهو من الصف C^1 قطعياً.

تعريف المنحني الأملس: نقول عن منحنٍ Γ إنّه أملس إذا وجد له ممثل وسيطي

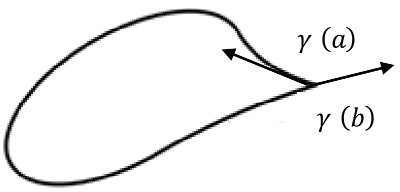
$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

مسموح به، ويحقّق الشروط التالية:

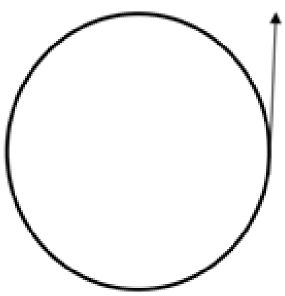
1. للتابع γ مشتق مستمر على المجال $[a, b]$.
2. $\gamma'(t) \neq 0 \; : \; \forall t \in [a, b]$
3. التابع γ متباين على المجال $[a, b]$ إذا كان Γ مفتوحاً، ومتباين على المجال $[a, b[$، و $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ إذا كان Γ مغلقاً.

التفسير: يبين الشرطان الأول والثاني وجود مماس للمنحني عند كل نقطة من نقاطه، يتغير هذا المماس بشكل مستمر دون أن يقفز عند أي نقطة.

أمّا الشرط الثالث فيعني أنّه عندما يكون المنحني مغلق فإنّ المماس عند نقطتي البداية والنهاية هو نفسه.



$\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$



$\gamma'(a) = \gamma'(b)$

المنحني على اليمين أملس، والمنحني على اليسار ليس أملس.

<u>**تذكر أنّ**</u> قيمة المشتق تعبّر عن ميل المماس عند تلك النقطة.

وبالتالي عدم تساوي قيمتي المشتق عند a, b علماً أنّ صورة a تنطبق على صورة b فهذا يعني وجود مماسين بميلين مختلفين للمنحني عند تلك النقطة، وفي هذه الحالة يكون المنحني ليس أملس.

...انتهت المحاضرة الحادية عشرة...